

GPT-6 Astra取得哥德巴赫猜想重大突破！

算法与数学之美 2026年9月22日 10:30 北京

数学界重大突破！

就在最近，GPT-6 Astra又在哥德巴赫猜想上取得新进展了。

网友Captain Sude宣布：Astra已成功证明了关于刘维尔函数的一项类哥德巴赫猜想！

← 帖子



Captain Sude
@captain_sude



🔄 翻译自 英语 显示原文 ⚙️

Liouville 版本的哥德巴赫猜想现已被完全证明并通过 Lean 验证！

每个大于 2 的正偶数都是两个 Liouville 值等于 -1 的正数之和。

评价此翻译：👍 🗨️

New Release v1.0.0

Liouville-Goldbach

Proof that every positive even number greater than 2 is the sum of two positive numbers with Liouville value -1.



1
Contributor

Release Liouville-Goldbach · CaptainSude/Liouville-Goldbach

来自 github.com

上午1:36 · 2026年9月17日 · 7,488 查看

🗨️ 公众号 · 新智元

具体来说，它无条件证明了哥德巴赫猜想的Liouville弱形式。更惊人的是，跟我们的想象不同，这一次，Astra并不只是靠着大力出奇迹的算力碾压——它做出非常优雅的逻辑推理。

并且，这个证明现在已经通过了Lean 4的形式化验证。



摘不下的明珠

在这之前，哥德巴赫猜想这个幽灵，已经折磨了人类数学家近三个世纪。

1742年，哥德巴赫在欧拉的信中提出这个猜想：「任一大于2的偶数，都可以写成两个素数之和。」

为了它，无数人耗尽心血。从哈代、李特尔伍德，到陈景润证明「1+2」，人类始终无法皇冠上的明珠——「1+1」。

大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和

陈 景 润

(中国科学院数学研究所)

摘 要

本文的目的在于用筛法证明了：每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和。

关于孪生素数问题亦得到类似的结果。

公众号·新智元

这是因为，素数的分布太诡异了！

既然死磕行不通，数学家们脑洞大开，搞出一套「替身文学」——刘维尔版本的哥德巴赫猜想。

为了模拟素数，数学家们引入了一个奇妙的工具：刘维尔函数。

这个函数记作 $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ ，其中的 $\Omega(n)$ 代表一个数字包含的质数因子的总个数。

它的规则就像一个只认「单双数」的开关：如果一个数包含的质数块个数是偶数，那么 $\lambda(n)=1$ 。

如果包含的质数块个数是奇数，那么 $\lambda(n)=-1$ 。

所有的纯质数（比如2, 3, 5, 7, 11），它们的刘维尔函数值绝对都是 -1！然而，反过来并不成立，比如8、12的 λ 值也是 -1。

2018年，在知名数学论坛MathOverflow上，有人提出了一个弱化版哥德巴赫猜想：

对于每一个大于2的偶数 N ，是否总能找到两个正整数 a 和 b ，使得 $N=a+b$ ，并且 $\lambda(a)=\lambda(b)=-1$ 。

Goldbach's conjecture for the Liouville function

Asked 8 years, 1 month ago Modified 8 years, 1 month ago Viewed 692 times



Is it true that for every even integer $N > 2$, there exist positive integers a, b such that $a + b = N$ and $\lambda(a) = \lambda(b) = -1$?

9

Here λ is the [Liouville function](#).



nt.number-theory

analytic-number-theory

prime-numbers

arithmetic-functions

新智元



如果经典的哥德巴赫猜想是对的，那么这俩素数的刘维尔值必然都是-1，所以这个「刘维尔猜想」也绝对是对的。

但现在，数学家们放宽了条件：加数不一定非得是纯素数，只要它的质因子个数是奇数就行！



黎曼阴影下的突围：AI给出惊天两页纸

既然放宽了条件，应该很容易证明吧？结果，它依然难得令人发指！

问题的核心在于，数学家想要研究这种正负交替的符号在加法组合下，会不会像抛硬币一样互相抵消，从而揭示隐藏在加法底下的深层秩序。这关乎打通数学中「乘法积木」与「加法组合」的桥梁。

直到2024年，数学家 Alexander P. Mangerel 终于有了突破。在一篇论文中，他证明了：对于所有足够大的偶数，这个猜想是成立的。

ON A GOLDBACH-TYPE PROBLEM FOR THE LIOUVILLE FUNCTION

ALEXANDER P. MANGEREL

ABSTRACT. Let λ denote the Liouville function. We show that for all sufficiently large integers N , the (non-trivial) convolution sum bound

$$\left| \sum_{n < N} \lambda(n) \lambda(N - n) \right| < N - 1$$

holds. This (essentially) answers a question posed at the 2018 AIM workshop on Sarnak's conjecture.

公众号 · 新智元

链接: <https://arxiv.org/abs/2404.12117>

但是！它的证明带着两个限制。

1. 「足够大」：意味着它不包括那些比较小的偶数。
2. 「GRH」：他的证明严重依赖于广义黎曼猜想。也就是说，只有在广义黎曼猜想成立的前提下，他的结论才成立。

而这一次，Astra 和 Captain Sude 的团队，直接把这两个枷锁突破了！

一开始，Astra 丢出了一份仅仅只有2页纸的PDF。

Liouville's Goldbach Problem for Multiples of Four

The problem

For a positive integer n , let $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$, where $\Omega(n)$ counts prime factors with multiplicity. Thus $\lambda(p) = -1$ for every prime p , and $\lambda(ab) = \lambda(a)\lambda(b)$ for all positive integers a, b .

In 2018, Shusterman asked whether every even integer $N > 2$ can be written as $N = a + b$ with $a, b > 0$ and $\lambda(a) = \lambda(b) = -1$ [1]. This weakens the binary Goldbach conjecture: each summand need only have an odd number of prime factors, counted with multiplicity.

Mangerel proved an unconditional correlation bound [2], recalled below. He later proved Shusterman's assertion for all sufficiently large even integers under the Generalised Riemann Hypothesis for Dirichlet L -functions [3, Theorem 1.2]. The same paper records an elementary unconditional proof for multiples of eight [3, Section 6.2]. We prove the following.

Theorem. Every positive integer divisible by four is the sum of two positive integers whose Liouville values are both -1 .

The only external theorem needed is Mangerel's bound [2, Theorem 1.2]:

$$\left| \sum_{n=1}^{m-1} \lambda(n) \lambda(m-n) \right| < m - 1 \quad (m \geq 11). \quad (1)$$

In particular, some pair summing to m has equal Liouville values: otherwise every term would be -1 , making the absolute value exactly $m - 1$. The descent below turns this unspecified equal-sign pair at m into a pair of negative signs at $4m$.

A descent

Lemma. Let $m > 1$ be odd and not divisible by three. If no pair of positive integers summing to $4m$ has both Liouville values -1 , then

$$\lambda(n) = -\lambda(m-n) \quad (1 \leq n < m).$$

Proof. Multiplication by four preserves Liouville values, so there is no pair of negative signs summing to m . Multiplication by two reverses them, so there is no pair of positive signs summing to $2m$.

It remains to exclude a pair $a + b = m$ with $\lambda(a) = \lambda(b) = 1$. Suppose such a pair exists. Since m is odd, we may order each such pair with $a < b$. Choose one minimizing $b - a$.

First, neither summand is divisible by three. If $b = 3c$, then $\lambda(c) = -1$. The absence of a pair of negative signs at m forces $\lambda(m - c) = 1$, and hence

$$\lambda(3m - b) = \lambda(3(m - c)) = -1.$$

The complement of $3m - b$ at $4m$ is $m + b$, so $\lambda(m + b) = 1$. But $a + (m + b) = 2m$ is now a forbidden pair of positive signs. Interchanging a and b also excludes divisibility of a by three.

Since 3 does not divide $m = a + b$, the nonzero residues of a and b modulo three must be equal. Therefore

$$a' = \frac{m+a}{3}, \quad b' = \frac{m+b}{3}$$

are positive integers with $a' + b' = m$. The pairs $b + (m + a) = 2m$ and $a + (m + b) = 2m$ force $\lambda(m + a) = \lambda(m + b) = -1$. Multiplication by three reverses Liouville values, so $\lambda(a') = \lambda(b') = 1$. Yet

$$0 < b' - a' = \frac{b-a}{3} < b - a,$$

contradicting minimality. Thus every pair at m has opposite signs, as claimed. $\square$

Completing the proof

Write $N = 4m$. Suppose first that $m \geq 11$ and neither two nor three divides m . If the required pair at $4m$ were absent, the lemma would force every summand in (1) to be -1 , contradicting Mangerel's bound.

Next observe that

$$8 = 3 + 5 = 4 + 4, \quad 12 = 5 + 7 = 6 + 6.$$

For each total, the first pair has two negative signs and the second has two positive signs. Multiplying all summands by any positive integer d multiplies both signs by $\lambda(d)$, so these two possibilities are either preserved or interchanged. Hence every multiple of eight or twelve has a pair of negative signs. This covers $2 \mid m$ and $3 \mid m$.

The only positive integers $m < 11$ divisible by neither two nor three are 1, 5, 7. They are covered by

$$4 = 2 + 2, \quad 20 = 3 + 17, \quad 28 = 5 + 23,$$

whose summands are all prime. This proves the theorem. $\square$

Formal verification. The accompanying Lean 4 development checks the elementary argument and the deduction from Mangerel's bound, using Mathlib's Liouville function. Mangerel's published theorem is an explicit input; its proof is not part of the formalization. The mathematical theorem above is unconditional.

References

1. M. Shusterman, *Goldbach's conjecture for the Liouville function*, MathOverflow question 307479, 3 August 2018, <https://mathoverflow.net/q/307479>
2. A. P. Mangerel, *On a Goldbach-Type Problem for the Liouville Function*, International Mathematics Research Notices **2024**, no. 16, 11865–11877, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnac149>
3. A. P. Mangerel, *On Shusterman's Goldbach-type problem for sign patterns of the Liouville function*, arXiv:2412.17199, 2024, <https://arxiv.org/abs/2412.17199>

公众号 · 新智元

这份精悍的论文中，Astra 宣布——

无需广义黎曼猜想，可以无条件证明：所有能被4整除的正整数，都可以表示为两个刘维尔值为-1的正整数之和！

在PDF中，Astra巧妙地利用了Mangerel论文中的一个「无条件相关性界限」，结合了一个极其精妙的下降法。

定理的核心逻辑，是用反证法：假设存在一个奇数 m （不被3整除），并且在 $4m$ 这个规模下，没有任何一对和为 $4m$ 的数字的刘维尔值都是 -1。

Lemma. Let $m > 1$ be odd and not divisible by three. If no pair of positive integers summing to $4m$ has both Liouville values -1 , then

$$\lambda(n) = -\lambda(m-n) \quad (1 \leq n$$

Proof. Multiplication by four preserves Liouville values, so there is no pair of negative signs summing to m . Multiplication by two reverses them, so there is no pair of positive signs summing to $2m$.

It remains to exclude a pair $a + b = m$ with $\lambda(a) = \lambda(b) = 1$. Suppose such a pair exists. Since m is odd, we may order each such pair with $a < b$. Choose one minimizing $b - a$.

First, neither summand is divisible by three. If $b = 3c$, then $\lambda(c) = -1$. The absence of a pair of negative signs at m forces $\lambda(m - c) = 1$, and hence

$$\lambda(3m - b) = \lambda(3(m - c)) = -1.$$

The complement of $3m - b$ at $4m$ is $m + b$, so $\lambda(m + b) = 1$. But $a + (m + b) = 2m$ is now a forbidden pair of positive signs. Interchanging a and b also excludes divisibility of a by three.

Since 3 does not divide $m = a + b$, the nonzero residues of a and b modulo three must be equal. Therefore

$$a' = \frac{m+a}{3}, \quad b' = \frac{m+b}{3}$$

are positive integers with $a' + b' = m$. The pairs $b + (m + a) = 2m$ and $a + (m + b) = 2m$ force $\lambda(m + a) = \lambda(m + b) = -1$. Multiplication by three reverses Liouville values, so $\lambda(a') = \lambda(b') = 1$. Yet

0

contradicting minimality. Thus every pair at m has opposite signs, as claimed.  公众号 · 新智元

接下来，Astra开始步步紧逼。

1. 因为乘以4不会改变刘维尔值，所以 m 本身也不能被拆成两个负号的数。
2. 因为乘以2会翻转刘维尔值（多了一个质因子2），所以 $2m$ 不能被拆成两个正号的数。
3. 接着，AI通过构造 $a+b=m$ 且 $\lambda(a)=\lambda(b)=1$ 的情况，并选取差值 $b-a$ 最小的一对，利用它们与 3 的整除关系，强行推导出了一个矛盾！

它发现，如果你假设 $4m$ 没有这样的拆分，那么通过乘法与加法的交错逼近，最终会在局部迫使所有的数字都带有相反的符号，这直接违背了Mangerel之前证明的界限。

就这样，仅仅用初等的代数推导（甚至高中生都能看懂推导过程），Astra就这样发现了无条件成立的情况。



48小时，彻底终结全偶数域

而且，还没结束。

Completing the proof

Write $N = 4m$. Suppose first that $m \geq 11$ and neither two nor three divides m . If the required pair at $4m$ were absent, the lemma would force every summand in (1) to be -1 , contradicting Mangerel's bound.

Next observe that

$$8 = 3 + 5 = 4 + 4, \quad 12 = 5 + 7 = 6 + 6.$$

For each total, the first pair has two negative signs and the second has two positive signs. Multiplying all summands by any positive integer d multiplies both signs by $\lambda(d)$, so these two possibilities are either preserved or interchanged. Hence every multiple of eight or twelve has a pair of negative signs. This covers $2 \mid m$ and $3 \mid m$.

The only positive integers $m < 11$ divisible by neither two nor three are 1, 5, 7. They are covered by

$$4 = 2 + 2, \quad 20 = 3 + 17, \quad 28 = 5 + 23,$$

whose summands are all prime. This proves the theorem. $\square$

Formal verification. The accompanying Lean 4 development checks the elementary argument and the deduction from Mangerel's bound, using Mathlib's Liouville function. Mangerel's published theorem is an explicit input; its proof is not part of the formalization. The mathematical theorem above is unconditional.

据项目作者 Captain Sude 透露，Astra 在第一天证明了「4的倍数」情形后，第二天，它又找到了一条全新的初等证明路线，直接把结果推广到了全部大于2的偶数！

这一次，它给出这个核心主张：

$$\forall N \in 2\mathbb{N}, N > 2 \implies \exists a, b \in \mathbb{Z}^+, N = a + b \wedge \lambda(a) = \lambda(b) = -1.$$

其中，没有任何「充分大」的限制，没有有限例外集，所有偶数，无条件成立！

而它的证明思路，更是让人拍案叫绝。

它并没有使用暴力穷举，也没有靠把以前的解析估计压缩得更紧，而是玩了一步漂亮的「结构转化」。

AI的逻辑链条如下。

第一步：寻找替罪羊。 AI先证明，对于每一个大于3的素数 p ，都存在正整数 u, v ，使得 $2p = u + v$ ，并且它们的刘维尔值都是1。如果不成立会怎样？这就构成了「加法符号模式的缺失」。

第二步：逼迫现出原形。 把刘维尔函数延拓到有限域 F_p 上，定义一个函数 G 。因为前面的「加法分解不存在」，这个函数 G 在局部被逼出了乘法对称性缺陷（Defects）。

第三步：完美的交换律。 这是证明中最惊艳的一笔！因为乘以 -2 再乘以 -3 ，和乘以 -3 再乘以 -2 是一样的。AI利用这个「可交换」的性质，让两条路径互相抵消，最终把所有的非零缺陷全部消灭！

第四步：向全局传染。 利用一个下降引理，把局部成立的乘法规则，像病毒一样传播到整个有限域，强迫函数 G 变成一个全局严格的乘法对象。

第五步：致命一击（二次剩余制造矛盾）。 既然 G 变成了严格的乘法函数，那么任何数的平方，其 G 值必须是1。然而，根据二次互反律，能在有限域内找到一个素数 l ，它明明是个「平方数」，但因为它是素数，它本身的刘维尔值又必须是 -1 。

于是， $1 = -1$ 。矛盾爆发！

至此，一开始「分解不存在」的假设被彻底粉碎。Liouville–Goldbach 猜想在全偶数域无条件成立！

这条把加法阻碍转化为乘法刚性的论证路线，简直太优雅了，体现了高度抽象和直觉的顶级思维。



Captain Sude
@captain_sude



Extremely drunk, yelling at CgatGPT to solve Goldbach conjecture, still getting impressive partial results. This is the future of mathematics and its glorious, posting results soon

喝得烂醉，冲着 CgatGPT 大喊让它攻克哥德巴赫猜想，但依然得到了相当令人印象深刻的部分结果。这或许正是数学的未来，也是其辉煌时刻，我很快会公布相关结果。

8:23 PM · Sep 19, 2026 · 2,414 Views

公众号 · 新智元



已通过Lean 4形式化验证

这一次，Astra还同时提交了Lean 4的完整形式化验证。

通过Lean 4验证，就意味着逻辑上绝对正确。

知乎上UP主@SUNNY99 立马对 Astra 开源的 v1.0.0 版本进行了独立复核。结果令人震撼：Lean 证明可以完美重新编译！

其中，最终定理与论文主张完全一致。代码里没有任何「sorry」（在Lean中代表未填补的坑）、没有乱造的自定义数学公理、所有的公理依赖完全正常，249个偶数的数值冒烟测试全部通过。

我用AI对它做了一次独立复核

现在 AI 数学结果越来越多，单纯看到一份 PDF 没办法说明任何事，还是得复核后看结果。

这个项目有一点我很喜欢：它同时提供了完整的 Lean 形式化，很方便验证，我认为AI协作出的结果最好的一个形式就是像这样，既有人类可读的证明，也有方便机器验核的形式化代码，方便第三方来复核这些成果。

所以我用AI对公开的 v1.0.0 做了一次独立复核。完整重放由 GPT 5.6 Sol 和 Grok 4.6 完成；发布前我又用 Kimi 把这份验核材料从头到尾核了一遍。各日志里的 commit、Lean 版本、mathlib 版本互相对得上，编译日志、公理审计、源码哈希的记录一致；数值冒烟测试我重跑了一遍，249 个偶数全部通过；论文 tex 源码里的主定理和文献背景表述也和公开资料吻合。公众号·新智元

看到这里，可能有些朋友会问：那这代表哥德巴赫猜想彻底被解决了吗？

我们必须严谨地说：还没有。

目前解决的，是哥德巴赫猜想的刘维尔弱化版本。

从「质因数个数为奇数的合数」跨越到「纯正的质数」，中间仍然隔着天堑。经典的哥德巴赫猜想，依然是那颗高高悬挂的果实。

但是，这绝不意味着这次突破不伟大。

首先，在纯数学意义上，它为整个数论搭起了一座打通「乘法积木」与「加法组合」的宏伟桥梁。

这可能就是未来攻克原版哥德巴赫猜想的核心钥匙。

其次，在AI意义上，这是一个历史性的奇点时刻。

一直以来，我们认为AI擅长的是海量记忆和暴力计算，比如下围棋、算蛋白质折叠。但这一次，Astra 展现出了惊人的数学直觉和品味。

它像一位极具天赋数学家，写出一篇让人类数学家直呼优雅的证明。

参考资料：

https://x.com/captain_sude/status/2099890355613155420

<https://www.zhihu.com/question/2083895373177931200/answer/2084099614551102975>

文章来源：新智元。